41. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 11–13
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

411321
Man bestimme alle Paare $(x; y)$ reeller Zahlen, die das Gleichungssystem

$$x^3 = y^2 - 1 \quad (1)$$
$$x^2 = y + 1. \quad (2)$$

erfüllen.

411322
Man ermittle alle positiven ganzen Zahlen z, die durch 41 teilbar sind und genau 41 positive Teiler besitzen.

411323
Gegeben sei ein Halbkreis mit dem Radius r. Diesem Halbkreis seien rechtwinklige Dreiecke $\triangle ABC$ wie in Abbildung A411323 umbeschrieben. Unter allen derartigen Dreiecken ermittle man dasjenige mit dem kleinsten Flächeninhalt.

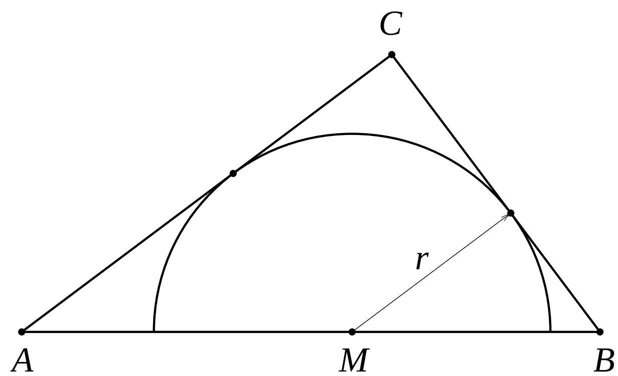

Abbildung A411323

411324

a) Ein Käfer sitzt am Morgen am Fuße eines Baumes von 2 m Höhe. Im Laufe des Tages krabbelt der Käfer einen Meter am Stamm nach oben. In der folgenden Nacht, während der Käfer schläft, wächst der Baum – entlang der gesamten Länge gleichmäßig – um einen Meter. Am folgenden Tag und in der folgenden Nacht wiederholt sich der Vorgang: Der Käfer krabbelt jeden Tag einen Meter weit, nachts wächst der Baum um einen Meter. Erreicht der Käfer auf diese Weise jemals die Spitze des Baumes?

b) Am Fuße eines größeren Baumes, dessen anfängliche Höhe 10 m beträgt, beginnt ein kleinerer Käfer nach oben zu kriechen. Dieser Käfer schafft nur 10 cm pro Tag, der Baum aber wächst jede Nacht um einen Meter wie der erste. Erreicht dieser Käfer die Baumspitze?