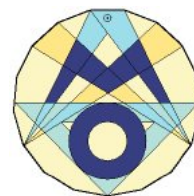


10. Landeswettbewerb 2004 in Bonn



3. Runde der 43. Mathematikolympiade
Aufgaben der Klassen 12 und 13

Aufgabe 1:

Man zeige, dass für positive reelle Zahlen a und b stets die Ungleichung

$$a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$$

gilt, und untersuche, in welchen Fällen Gleichheit eintritt.

Aufgabe 2:

Die ganzen Zahlen a , b und c seien Maßzahlen der Kantenlängen eines Quaders, dessen Raumdiagonale die Länge 2004 hat. Man beweise:

- a) Die Zahlen a , b und c sind gerade.
- b) Die Zahlen a , b und c sind durch 4 teilbar.

Aufgabe 3:

Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge 1. Auf den Seiten \overline{CD} und \overline{AD} liegen die Punkte P bzw. Q so, dass der Umfang des Dreiecks PDQ gleich 2 ist. Man beweise, dass der Winkel PBQ die Größe 45° hat.