Landesverband Mathematikwettbewerbe NRW e. V.

11. Landeswettbewerb 2005 in Essen

3. Runde der 44. Mathematikolympiade

Aufgaben der Klassen 12/13

Aufgabe 1:

Man zeige, dass für alle positiven reellen Zahlen a, b, c mit $abc = 1$ die Ungleichung

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c$$

gilt.

Aufgabe 2:

Gegeben seien reelle Zahlen a, x_0 und y_0. Durch die rekursive Vorschrift

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a(x_n - y_n) \\ y_{n+1} &= a(x_n + y_n) \end{aligned}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

werden zwei Folgen (x_k) und (y_k) definiert. Man bestimme in Abhängigkeit von x_0 und y_0 alle Zahlen a, für die die Folge (x_k) periodisch mit Periodenlänge 8 ist.

Hinweis: Eine Folge (x_k) heißt periodisch, falls eine positive ganze Zahl p existiert, mit der $x_{k+p} = x_k$ für alle nichtnegativen ganzen Zahlen k gilt.

Aufgabe 3:

Gegeben seien ein Kreis k_1 und ein Punkt C außerhalb des Kreises. Die Berührungspunkte der Tangenten von C an k_1 seien A und B. Ein weiterer Kreis k_2 gehe durch den Punkt C und berühre die Gerade AB im Punkte B. Der zweite Schnittpunkt von k_1 und k_2 sei Q. (Siehe Abbildung.)

Man beweise, dass die Gerade AQ die Strecke $\overline{BC}$ halbiert.