Landesverband Mathematikwettbewerbe NRW e. V.

15. Landeswettbewerb 2009 in Bad Oeynhausen

3. Runde der 48. Mathematikolympiade

Aufgaben der Klasse 8

Aufgabe 1:

Die folgende Knobelaufgabe wurde einem 1980 in Moskau erschienenen Buch entnommen:

In einer Stadt lebten einst zwei Sonderlinge, Tschuk und Gek, mit ganz merkwürdigen Eigenschaften. Während Tschuk montags, dienstags und mittwochs stets log, sagte er an den übrigen Wochentagen immer die Wahrheit. Gek log immer an Dienstagen, Donnerstagen und Samstagen, während er an allen anderen Tagen nur die Wahrheit sagte.
Als ein Reporter dieses unzertrennliche Paar traf, fragte er einen von ihnen: „Sag mal, wie heißt du?“ Ohne Zögern antwortete dieser: „Tschuk.“ – „Und welcher Wochentag ist heute?“, fragte der Reporter weiter. „Gestern war Sonntag“, sagte sein Gesprächspartner. „Und morgen ist Freitag“, fügte dessen Freund hinzu, der bislang geschwiegen hatte. „Wie denn das?“, wunderte sich der Reporter und wandte sich an den Freund: „Bist du sicher, dass du die Wahrheit sprichst?“ – „Ich sage mittwochs immer die Wahrheit“, hörte er als Antwort, und plötzlich waren die beiden Sonderlinge verschwunden.
Nachdem der Reporter zu Hause scharf nachgedacht hatte, kam er dahinter, wer von den beiden Freunden Tschuk und wer Gek war.

Weise nach, dass man aus dieser Geschichte zweifelsfrei ermitteln kann, wen der Reporter zuerst befragt hat und an welchem Wochentag das Gespräch stattgefunden hat.

Aufgabe 2:

Alexander erklärt seinen Partygästen folgende Denksportaufgabe:

„Ich habe hier drei Kärtchen. Auf das erste schreibe ich die Zahl 23, auf das zweite die Zahl 79 und auf dem dritten steht eine bestimmte zweistellige Zahl. Wenn man diese Kärtchen in beliebiger Reihenfolge nebeneinanderlegt, erhält man eine sechsstellige Zahl. Wenn man alle möglichen sechsstelligen Zahlen, die auf diese Weise gebildet werden können, addiert, beträgt die Summe 2989896. Nun könnt ihr herausfinden, welche Zahl auf dem dritten Kärtchen steht.“

Untersuche, ob durch Alexanders Aussagen diese Zahl eindeutig bestimmt ist. Ist dies der Fall, dann gib diese Zahl an.

Aufgabe 3:

Über fünf Punkte A, B, C, D, E wird vorausgesetzt:

(1) Die Punkte liegen in dieser Reihenfolge auf einem Kreis k mit dem Mittelpunkt M.
(2) Der Mittelpunkt M liegt auf der Strecke $\overline{AC}$.
(3) Die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ sind gleich lang.
(4) Die Strecken $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ und $\overline{EA}$ haben dieselbe Länge.

a) Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen folgt: Die Dreiecke $\triangle MCD$, $\triangle MDE$ und $\triangle MEA$ sind kongruent.
b) Berechne die Größen der Innenwinkel im Dreieck $\triangle BCD$.

Aufgabe 4:

Die Felder eines 5×5-Quadrats sollen so mit 25 gegebenen einfarbigen 1×1-Kärtchen belegt werden, dass ein Farbmuster entsteht, welches symmetrisch zu einer Diagonalen des Quadrats ist.

a) Beweise, dass dies, unabhängig davon, wie viele Kärtchen von jeder Farbe vorhanden sind, stets möglich ist, wenn die Kärtchen höchstens 6 verschiedene Farben haben.
b) Untersuche, ob dies, unabhängig davon, wie viele Kärtchen von jeder Farbe vorhanden sind, stets möglich ist, wenn die Kärtchen 7 verschiedene Farben haben.
c) Ermittle alle Anzahlen von Farben, die größer als 6 sind, für die man ein derartiges symmetrisches Farbmuster herstellen kann, wenn man vorgeben darf, wie viele Kärtchen von jeder Farbe vorkommen.