



15. Landeswettbewerb 2009 in Bad Oeynhausen



3. Runde der 48. Mathematikolympiade
Aufgaben der Klasse 9

Aufgabe 1:

Ein Mathefloh hüpft auf der Zahlengeraden herum. Er springt von einer beliebigen rationalen Zahl a los, für die $a \neq 0$ und $a \neq 1$ gilt. Dabei darf er aber nur auf solchen rationalen Zahlen b landen, für die $b \neq 0$ und $b \neq 1$ gilt und welche die Sprungbedingung $a + \frac{1}{b} = 1$ erfüllen.

Weise nach: Der Floh kehrt stets nach gleich vielen Sprüngen erstmals zu seinem Ausgangspunkt zurück.

Aufgabe 2:

Über fünf Punkte A, B, C, D, E wird vorausgesetzt:

- (1) Die Punkte liegen in dieser Reihenfolge auf einem Kreis k mit dem Mittelpunkt M .
- (2) Der Mittelpunkt M liegt auf der Strecke \overline{AC} .
- (3) Die Strecken \overline{AB} und \overline{BC} sind gleich lang.
- (4) Die Strecken \overline{CD} , \overline{DE} und \overline{EA} haben dieselbe Länge.

- a) Beweise, dass aus diesen Voraussetzungen folgt: Die Dreiecke $\triangle MCD$, $\triangle MDE$ und $\triangle MEA$ sind kongruent.
- b) Berechne die Größen der Innenwinkel im Dreieck $\triangle BCD$.

Aufgabe 3:

Ein Dodekaeder (genauer: Pentagondodekaeder) ist ein Polyeder, dessen Seitenflächen regelmäßige Fünfecke sind, von denen in jeder Ecke drei zusammenstoßen (siehe Skizze). Ein Dodekaeder hat 12 Seitenflächen, 30 Kanten und 20 Ecken.

Man bestimme alle natürlichen Zahlen n , für die es möglich ist, die Ecken eines Dodekaeders so mit den Zahlen $1, 2, \dots, n$ zu beschriften, dass folgende Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind:

- (1) An jeder Ecke steht genau eine der Zahlen $1, 2, \dots, n$.
- (2) Jede der Zahlen $1, 2, \dots, n$ kommt gleich oft vor.
- (3) Für jede Seitenfläche ist die Summe der Zahlen an ihren Ecken dieselbe.

