



15. Landeswettbewerb 2009 in Bad Oeynhausen



3. Runde der 48. Mathematikolympiade  
Aufgaben der Klasse 11

**Aufgabe 1:**

Man beweise, dass für alle positiven reellen Zahlen  $a$  und  $b$  mit  $ab \leq 1$  die Ungleichung

$$\frac{a}{b} + \frac{1}{a} \geq a + 1 \quad (1)$$

gilt.

**Aufgabe 2:**

Gegeben seien ein Dreieck  $ABC$  und ein innerer Punkt  $P$  der Seite  $\overline{AB}$ . Eine Gerade durch  $P$  zerlege das Dreieck in zwei flächengleiche Teile. Der zweite Schnittpunkt der Geraden mit einer Dreiecksseite sei  $Q$ . Man beweise: Die Parallele zu  $\overline{PC}$  durch  $Q$  halbiert  $\overline{AB}$ .

**Aufgabe 3:**

Gegeben sei die aus den Produkten je zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen gebildete Folge

$$a_1 = 0 \cdot 1, a_2 = 1 \cdot 2, a_3 = 2 \cdot 3, a_4 = 3 \cdot 4, \dots$$

Man beweise, dass es für jede natürliche Zahl  $n \geq 2$  eine Menge von genau  $2n$  aufeinanderfolgenden Gliedern  $a_j$  gibt, die so in zwei Teilmengen zerlegt werden kann, dass die Summen der Elemente beider Teilmengen übereinstimmen.