



15. Landeswettbewerb 2009 in Bad Oeynhausen



3. Runde der 48. Mathematikolympiade  
Aufgaben der Klassen 12/13

**Aufgabe 1:**

Man beweise, dass für alle positiven reellen Zahlen  $a$  und  $b$  mit  $ab \leq 1$  die Ungleichung

$$\frac{a}{b} + \frac{1}{a} \geq a + 1 \quad (1)$$

gilt.

**Aufgabe 2:**

Ein Dreieck  $ABC$  habe an der Ecke  $C$  einen stumpfen Winkel, die Längen der angrenzenden Seiten seien  $a$  und  $b$ , und die Länge der  $C$  gegenüberliegenden Seite sei  $c$ . Die Höhe von  $C$  auf  $AB$  habe die Länge  $h$ . Man zeige

$$c + h > a + b.$$

**Aufgabe 3:**

Gegeben sei die aus den Produkten je zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen gebildete Folge

$$a_1 = 0 \cdot 1, a_2 = 1 \cdot 2, a_3 = 2 \cdot 3, a_4 = 3 \cdot 4, \dots$$

Man beweise, dass es für jede natürliche Zahl  $n \geq 2$  eine Menge von genau  $2n$  aufeinanderfolgenden Gliedern  $a_j$  gibt, die so in zwei Teilmengen zerlegt werden kann, dass die Summen der Elemente beider Teilmengen übereinstimmen.