16. Landeswettbewerb 2010 in Neuss

3. Runde der 49. Mathematikolympiade
Aufgaben der Klassen 12/13

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 1:

Man bestimme alle positiven reellen Zahlen a, b, die die Gleichung

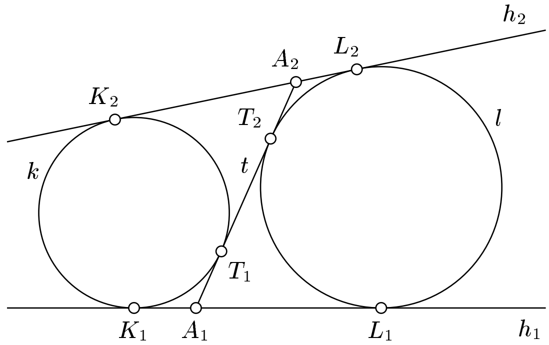
$$\frac{2a+3b+4}{1+\sqrt{a}} = 4\sqrt{b}$$

erfüllen.

Aufgabe 2:

Es seien h_1 und h_2 die beiden äußeren gemeinsamen Tangenten der außerhalb voneinander gelegenen Kreise k und l. Die vier dabei auftretenden Berührungspunkte seien wie in nebenstehender Figur mit K_1, L_1, K_2 und L_2 bezeichnet. Die Gerade t sei eine innere gemeinsame Tangente von k und l. Den ersteren dieser Kreise berühre sie in T_1, den letzteren in T_2. Außerdem treffe sie h_1 und h_2 in A_1 bzw. A_2, wobei A_1, T_1, T_2, A_2 in dieser Reihenfolge auf t liegen sollen.

Man beweise, dass $|A_1T_1| = |A_2T_2|$ gilt.



Aufgabe 3:

Xaver und Yvonne spielen mit Kastanien. Dazu füllen sie drei Schalen mit Kastanien. Deren Anzahlen seien n_1, n_2 und n_3. Beide Spieler wechseln sich in den Zügen ab. Xaver beginnt.

Derjenige Spieler, der am Zug ist, leert eine beliebige Schale und füllt die geleerte Schale wieder mit einer beliebigen Anzahl von Kastanien, die er einer der beiden anderen Schalen entnimmt. Dabei darf keine Schale leer bleiben. Wer keinen Zug mehr ausführen kann, hat verloren, und das Spiel ist beendet.

Man untersuche, ob Xaver oder ob Yvonne die Möglichkeit hat, den Sieg zu erzwingen. Man gebe eine Spielweise an, mit der dies möglich ist.